’21

前期日程

数　学　問　題

（医　学　部）

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この『数学問題』を開いてはいけません。
2. この中には, 2 枚の下書用紙と, 問題文を含む 5 枚の解答用紙があります。
3. 試験開始後，直ちに, 二つ折りになっているすべての用紙を広げてください。
4. 問題に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所があった場合は申し出てください。
5. 氏名と受験番号は，すべての解答用紙の所定の欄に必ず記入してください。
6. 解答用紙の裏面は計算等の下書きに使用しても構いませんが，解答は各問題の下の解答欄に記入し，裏面は解答に使用しないでください。解答用紙の裏面に解答してもその部分は採点しません。
7. 5 枚の解答用紙のみを回収しますので，この表紙と 2 枚の下書用紙は持ち帰ってください。

下　書　用　紙　(1)

下　書　用　紙　(2)

数　学

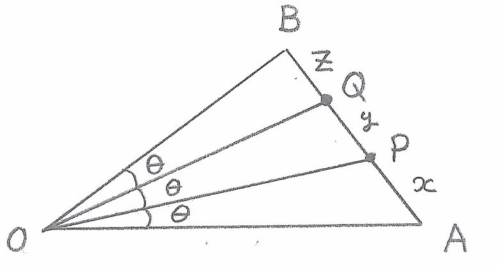
氏名	

受験番号	

$\boxed{1}$ $\triangle$OAB において，辺 AB 上に 2 つの点をとり，点 A に近い順にそれぞれ P, Q とする。線分 OP と線分 OQ は $\angle$AOB を 3 等分している。$\angle$AOP の大きさを θ とし，さらに線分 AP, 線分 PQ, 線分 QB の長さをそれぞれ x, y, z とする。このとき，$\sin\theta$ を x, y, z で表せ。

[解答欄]

医 $\boxed{1}$



$\triangle$OPQ の面積 S は $\frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\sin\theta$

線分OPは$\angle$AOQ の二等分線なので

$\mathrm{OA}:\mathrm{OQ} = x : y$ 　$\therefore \mathrm{OQ} = \dfrac{y \times \mathrm{OA}}{x}$

線分 OQ も$\angle$POB の二等分線なので

$\mathrm{OP}:\mathrm{OB} = y : z$ 　$\therefore \mathrm{OP} = \dfrac{y \times \mathrm{OB}}{z}$

したがって $S = \dfrac{y^2 \times \mathrm{OB} \times \mathrm{OA}}{2xz}\sin\theta$ …①

他方 $\triangle$OPQ の面積と$\triangle$OAB の面積を比較するとき，辺 AB を底辺とみれば

$\triangle$OPQ の面積は $\triangle$OAB の面積の $\dfrac{y}{x+y+z}$ 倍に等しいので

$S = \dfrac{y}{x+y+z} \times \dfrac{1}{2}\mathrm{OA} \times \mathrm{OB}\sin 3\theta$ …②

①，②より

$\dfrac{y^2}{2xz}\sin\theta = \dfrac{y\sin 3\theta}{2(x+y+z)}$ …③

ここで $\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta)$

$= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta$

$= 2\sin\theta\cos^2\theta + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\theta$

$= 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta$

$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ なので

③より

$\dfrac{y^2}{xz}\sin\theta = \dfrac{y}{x+y+z}(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)$

$y \neq 0$．また $0 < 3\theta < \pi$ なので $\sin\theta \neq 0$． したがって

$\dfrac{y}{xz} = \dfrac{3 - 4\sin^2\theta}{x+y+z}$

ゆえに

$\sin^2\theta = \dfrac{1}{4}\left\{3 - \dfrac{y(x+y+z)}{xz}\right\}$

$\sin\theta > 0$ より

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}\sqrt{3 - \dfrac{y(x+y+z)}{xz}}$

得点	

数　　　学

氏名	

受験番号	

2 M, A, E, B, A, S, H, I の 8 文字を使ってできる文字列について, 次の問いに答えよ。ただし, A と A の 2 文字は区別せず, また, 8 文字のうち母音は A, E, I である。

(1) 8 文字すべてを使ってできる文字列はいくつあるか。

(2) 8 文字すべてを使ってできる文字列のなかで, A が隣り合うものはいくつあるか。

(3) 8 文字すべてを使ってできる文字列のなかで, どの母音も隣り合わないものはいくつあるか。

(4) M, A, E, B, S, H, I の 7 文字を 3 組に分ける方法は何通りあるか。ただし, 3 組の区別はしない。

[解答欄]

医 2

(1) すべて異なる8文字からなる文字列は 8!通り。しかし, AとAは区別しないので

$$\frac{8!}{2!} = \underline{20160}$$

(2) 2つのAを1つの文字Aとみなせば, すべて異なる7文字を使ってできる文字列を考えればよいので

$$7! = \underline{5040}$$

(3) 母音をV, 子音をCとかく. 8文字のうち, 母音も子音も4文字ずつなので次の5つを考えればよい.

① C V C V C V C V
② V C C V C V C V
③ V C V C C V C V
④ V C V C V C C V
⑤ V C V C V C V C

上の①について,
Vの並べ方は $\frac{4!}{2!}$. ここでAとAは区別しないので 2!で割った.
他方 Cの並べ方は 4! なので
①は $\frac{4! \times 4!}{2!}$

②,③,④,⑤のどれも全く同じなので

$$\frac{4! \times 4!}{2!} \times 5 = \underline{1440}$$

(4) まず文字Mが3つの組のいずれかに属するのは 3通り.
次に文字Aも3つの組のいずれかに属するのでやはり 3通り. どの文字についても実は同様でやはり 3通り. したがって7文字を3組に分ける場合の数は $\underline{3^7 通り}$.
ただし, 当面は3組の区別を行っている. この場合の数から2組が空, さらに1組が空になる場合の数を引く必要がある.

2組が空になるのは $\underline{3通り}$.
次に, ある特定の1組が空になる場合の数は, どの文字も残りの2組に分けられるので $2^7 - 2$ 通り. ここで, 2組のうちのどちらかが空になる場合の数は2通りなのでこれを引いたことに注意.
したがって 3組のうちのどれか1組のみが空になる場合の数は $\underline{(2^7-2) \times 3 通り}$.

上では3組の区別を行っていたので, したがって求める方法は

$$\frac{3^7 - 3 - (2^7-2) \times 3}{3!}$$

$$= \underline{301} \text{（通り）}$$

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

3　k と l は $0 < k < 1,\ 0 < l < 1$ を満たす。$\triangle$OAB は 1 辺の長さが 1 の正三角形とし, 辺 OA を $k:(1-k)$ に内分する点を C, 辺 OB を $l:(1-l)$ に内分する点を D とする。O を通り直線 CD に垂直な直線と, 直線 AB との交点を E とする。E が線分 AB を $(1+m):m$ に外分するとき, 次の問いに答えよ。ただし, $m > 0$ である。

(1) $k > 2l$ が成り立つことを示せ。

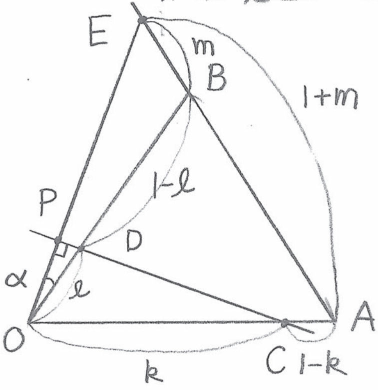
(2) m を k と l を用いて表せ。

(3) 直線 CD と直線 OE との交点を P とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を満たす s を k と l を用いて表せ。

(4) $k = 3l$ のとき, 前問 (3) の s を l を用いて表せ。

[解答欄]

医③ 物質環境③ 電子機械③ 情報③(情報③のみ(4)は除外)



(1) 直線CDと直線OEの交点をPとする. $\angle DOP = \alpha$ とおけば, $\angle ODC = \frac{\pi}{2} + \alpha$ なので $\angle OCD = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \frac{\pi}{3}$

$= \frac{\pi}{6} - \alpha$.

$\therefore\ \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{OP}{OC} = \frac{OP}{k}$

他方, 加法定理より

$\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha$

$= \frac{1}{2}\frac{OP}{OD} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{DP}{OD} = \frac{OP - \sqrt{3}\,OP}{2l}$

$< \frac{OP}{2l}$　$\therefore\ \frac{OP}{k} < \frac{OP}{2l}$　なので

$k > 2l$

(2) $\overrightarrow{OE} = \frac{-m\overrightarrow{OA} + (1+m)\overrightarrow{OB}}{1+m-m} = -m\overrightarrow{OA} + (1+m)\overrightarrow{OB}$

他方 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = l\,\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA}$.

$\overrightarrow{OE}$ と $\overrightarrow{CD}$ は垂直なので

$\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$　だから

$0 = mk + (1+m)l - \{ml + (1+m)k\}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$= mk + (1+m)l - \{ml + (1+m)k\}\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}\{m(k+l) + 2l - k\}$

$\therefore\ m = \frac{k-2l}{k+l}$

(3)

$\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OB} = -m\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + (1+m)|\overrightarrow{OB}|^2$

$= -\frac{m}{2} + 1 + m = \frac{m}{2} + 1$ … ①

他方, $s > 0$ に注意して

$\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OB} = OE \times OB\cos\alpha$

$= OE \times \frac{OP}{OD} = OE \times \frac{OP}{l} = \frac{s}{l}OE^2$ … ②

余弦定理より

$OE^2 = OA^2 + AE^2 - 2OA \times AE\cos\frac{\pi}{3}$

$= 1 + (1+m)^2 - 2(1+m)\frac{1}{2} = m^2 + m + 1$

これを②へ代入して

$\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{s}{l}(m^2 + m + 1)$ … ③

①, ③より

$s = \frac{l\left(\frac{m}{2} + 1\right)}{m^2 + m + 1} = \frac{kl(k+l)}{2(k^2 - kl + l^2)}$

(4) $k = 3l$ のとき

$s = \frac{3l^2 \times 4l}{2l^2(9 - 3 + 1)} = \frac{6}{7}l$

情報③では(4)はありません(除外して下さい).

得点	

数　　　学

氏名	

受験番号	

4　次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について答えよ。n を正の整数とするとき,

$$a_1 = 1, \qquad b_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}.$$

(1) 不等式 $b_m < a_m$ を満たす正の整数 m をすべて求めよ。

(2) $a_1, b_1, a_m, b_m, a_{m+1}, b_{m+1}$ の大小関係を不等号 $<$ を用いて表せ。ここで, m は2以上の整数である。

(3) n を正の整数とするとき, 不等式 $|a_n - b_n| < 2^{(1-2^n)}$ が成り立つことを証明せよ。

[解答欄]

医4　情報4　物質環境4　電子機械4　(情報4,物質環境4,電子機械4では(3)は除外)

(1)　$b_1=\sqrt{2}$, $a_1=1$ より $b_1<a_1$ は成立しないので, mは2以上.

$a_2-b_2=\frac{a_1+b_1}{2}-\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}=\frac{(a_1-b_1)^2}{2(a_1+b_1)}>0$

2以上の整数mに対して $a_m>b_m$ と仮定する.

$a_{m+1}-b_{m+1}=\frac{a_m+b_m}{2}-\frac{2a_mb_m}{a_m+b_m}$

$=\frac{(a_m-b_m)^2}{2(a_m+b_m)}>0$. ここですべての正の整数$n$について $a_n>0$ かつ $b_n>0$ であることに注意.

したがって $b_m<a_m$ が成立するのは mが2以上の任意の整数のとき.

(2)　nを1以上の整数とする.

$a_{n+1}b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\times\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$

$=a_nb_n$ なので

$a_{n+1}b_{n+1}=a_nb_n=\cdots=a_2b_2$

$=a_1b_1=\sqrt{2}$. だから $b_n=\frac{\sqrt{2}}{a_n}$ …①

さて $a_{n+1}-a_n=\frac{a_n+b_n}{2}-a_n$

$=\frac{b_n-a_n}{2}$ なので

$a_2-a_1=\frac{b_1-a_1}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}>0$.

他方 mを2以上の整数とするとき

(1)より $a_{m+1}-a_m=\frac{b_m-a_m}{2}<0$

なので $a_{m+1}<a_m$ …②
(mは2以上の整数)

①より $\frac{\sqrt{2}}{b_{m+1}}<\frac{\sqrt{2}}{b_m}$ なので

$b_m<b_{m+1}$ (mは2以上の整数) …③

(1),②,③より

$b_m<b_{m+1}<a_{m+1}<a_m$ …④

ところで $b_2=\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}=\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}>1=a_1$ …⑤

なぜなら $\sqrt{2}>1$ より $2\sqrt{2}>1+\sqrt{2}$.

ゆえに $\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}>1$ だから.

さらに①より $a_2=\frac{\sqrt{2}}{b_2}=\sqrt{2}\,\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$

$=\frac{1+\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}=b_1$ …⑥

④,⑤,⑥より

$a_1<b_m<b_{m+1}<a_{m+1}<a_m<b_1$

(3)　$n=1$ のとき $|a_1-b_1|=\sqrt{2}-1$

$<\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}=2^{(1-2^1)}$ より成立.

$n=2$のとき $|a_2-b_2|=a_2-b_2$

$=\frac{1+\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}-7}{2}<2^{(1-2^2)}$

$(\because 2<(\frac{29}{20})^2)$　2以上の整数nについて $|a_n-b_n|<2^{(1-2^n)}$ を仮定.

$|a_{n+1}-b_{n+1}|=a_{n+1}-b_{n+1}$

$=\frac{(a_n-b_n)^2}{2(a_n+b_n)}<\frac{(a_n-b_n)^2}{2(b_n+b_n)}$

$<\frac{(a_n-b_n)^2}{2\cdot 2a_1}<\frac{(a_n-b_n)^2}{2}<\frac{1}{2}\left(2^{(1-2^n)}\right)^2$

$=\frac{1}{2}2^{(2-2^{n+1})}=2^{(1-2^{n+1})}$.

$n+1$のときも成立.

したがってすべての正の整数nに対して $|a_n-b_n|<2^{(1-2^n)}$ が成立.

得点	

数　　　学

氏名	

受験番号	

5　a, b, c, d を実数の定数とするとき, すべての実数 x で定義された関数 $f(x)$ について, 次の問いに答えよ。

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leqq 0), \\ x^3 + ax^2 + bx + c & (0 < x \leqq 1), \\ 0 & (1 < x \leqq 2), \\ d\,e^{-\frac{1}{x-2}} & (x > 2). \end{cases}$$

ここで, 任意の正の実数 X と任意の正の整数 n について, $e^X \geqq \dfrac{X^n}{n!}$ が成り立つことを使ってよい。

(1) 関数 $f(x)$ がすべての x で微分可能であるための, a, b, c, d についての必要十分条件を求めよ。

(2) a, b, c, d が上の (1) で与えられた必要十分条件を満たすとき, 関数 $f(x)$ の $x = 0, x = 1, x = 2$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

[解答欄]

医 5　その1

(1) $f(x)$ はすべての x で微分可能と仮定する. したがってすべての x で連続である. ゆえに $x=0$ でも $x=1$ でも $x=2$ でも連続.

$x=0$ における連続性: まず $f(0)=0$.

$x<0$ のとき　$f(x)=x \to 0$ $(x\to 0)$

$0<x<1$ のとき　$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$\to c$　$(x\to 0)$　ゆえに $c=0$ …①

$x=1$ における連続性:

①より　$f(1)=a+b+1$.

$0<x<1$ のとき　$f(x)=x^3+ax^2+bx$
$\to a+b+1$　$(x\to 1)$

$1<x<2$ のとき　$f(x)=0 \to 0$ $(x\to 1)$

ゆえに　$a+b+1=0$ … ②

$x=2$ における連続性: まず $f(2)=0$.

①と②を使う.

$1<x<2$ のとき　$f(x)=0 \to 0$ $(x\to 2)$

$x>2$ のとき　$f(x)=d\,e^{-\frac{1}{x-2}} \to 0$ $(x\to 2)$

なぜならば　$x>2$ のとき

$$e^{-\frac{1}{x-2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-2}}} \leqq \frac{1}{\frac{1}{x-2}} = x-2.$$

したがって $f(x)$ がすべての x で連続であれば ①と②が成立する.

次に微分可能性. 仮定より $f(x)$ は $x=0$ でも $x=1$ でも $x=2$ でも微分可能.

$x=0$ における微分可能性:

$x<0$ のとき

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x-0}{x} = 1 \to 1 \quad (x\to 0)$$

$0<x<1$ のとき　①, ②より

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^3+ax^2+bx+c-0}{x}$$

$= x^2+ax+b \to b$　$(x\to 0)$

ゆえに $b=1$ …③　②より $a=-2$ …④

このとき　$f'(0)=1$

$x=1$ における微分可能性:

①, ③, ④ を使う. $f(1)=0$ に注意.

$0<x<1$ のとき

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^3-2x^2+x-0}{x-1}$$

$= x^2-x \to 0$　$(x\to 1)$

$1<x<2$ のとき

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{0-0}{x-1} = 0 \to 0 \quad (x\to 1)$$

ゆえに　$f'(1)=0$

$x=2$ における微分可能性:

$f(2)=0$ に注意.

$1<x<2$ のとき

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{0-0}{x-2} = 0 \to 0 \quad (x\to 2)$$

$x>2$ のとき

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{d\,e^{-\frac{1}{x-2}}-0}{x-2} \to 0 \quad (x\to 2)$$

得点	

医 5

数　　学

氏名	

受験番号	

5　a, b, c, d を実数の定数とするとき, すべての実数 x で定義された関数 $f(x)$ について, 次の問いに答えよ。

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leqq 0), \\ x^3 + ax^2 + bx + c & (0 < x \leqq 1), \\ 0 & (1 < x \leqq 2), \\ d\,e^{-\frac{1}{x-2}} & (x > 2). \end{cases}$$

ここで, 任意の正の実数 X と任意の正の整数 n について, $e^X \geqq \dfrac{X^n}{n!}$ が成り立つことを使ってよい。

(1) 関数 $f(x)$ がすべての x で微分可能であるための, a, b, c, d についての必要十分条件を求めよ。

(2) a, b, c, d が上の (1) で与えられた必要十分条件を満たすとき, 関数 $f(x)$ の $x=0, x=1, x=2$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

[解答欄]

$\boxed{医}$ $\boxed{5}$ その2

なぜならば

$$\frac{e^{-\frac{1}{x-2}}}{x-2} = \frac{1}{(x-2)\,e^{\frac{1}{x-2}}}$$

$$\leqq \frac{1}{(x-2)\dfrac{\left(\frac{1}{x-2}\right)^2}{2!}} = 2(x-2).$$

ゆえに $f'(2) = 0$

したがって $f(x)$ が すべての x で 微分可能であれば

$a=-2$ かつ $b=1$ かつ $C=0$ かつ d は任意の実数 となる. …⑤

逆に ⑤ が満たされれば $f(x)$ は すべての x で 微分可能 であることがわかる.

したがって

$a=-2$ かつ $b=1$ かつ $C=0$ かつ d は任意の実数」

(2)　(1) より

$f'(0)=1$, $f'(1)=0$, $f'(2)=0$」

得点	