

数 学

氏名

受験
番号

1

1個のさいころを3回続けて投げるとき、出た目の数を順に a, b, c とおく。以下の問に答えよ。(1) a, b, c のうち、少なくとも2つは偶数である確率を求めよ。(2) 積 abc が60である確率を求めよ。(3) 2次方程式 $x^2 - (a+b)x + c = 0$ が虚数解をもつ確率を求めよ。

[解答欄]

(1) 3回さいころを投げるとき、目の出方は全部で 6^3 通り。その中、偶数が2回、奇数が1回出る場合は、 ${}_3C_1 \cdot 3 \times 3 \times 3 = 3^4$ 通り偶数が3回出る場合は $3 \times 3 \times 3 = 3^3$ 通り

$$\text{よって求める確率は } \frac{3^4 + 3^3}{6^3} = \frac{3+1}{2^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(1) 別解 a, b, c が偶数か奇数かはそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率なので、

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

偶数が2回、奇数が1回 偶数が3回

(2) $abc = 60$ となるのは、 a, b, c が組として $\{2, 5, 6\}$ または $\{3, 4, 5\}$ となる場合である。各場合につき、 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 通りある。

$$\text{ゆえに求める確率は } \frac{6+6}{6^3} = \frac{12}{6^3} = \frac{1}{18}$$

(3) 判別式が負、すなわち $(a+b)^2 < 4c$ のときである。 $1 \leq c \leq 6$ に注意し、 $c=1$ のとき、これをみたす (a, b) は存在しない。 $c=2$ のとき、 $(a+b)^2 < 8 \Rightarrow a+b=2 \Rightarrow (a, b) = (1, 1)$ の1通り $c=3$ のとき $(a+b)^2 < 12 \Rightarrow a+b=2$ または $3 \Rightarrow (a, b) = (1, 1), (1, 2), (2, 1)$ の3通り $c=4$ のとき $(a+b)^2 < 16 \Rightarrow a+b=2$ または $3 \Rightarrow$ 上の3通り $c=5$ のとき $(a+b)^2 < 20 \Rightarrow a+b=2, 3$ または $4 \Rightarrow$ 上の3通りと $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ と
6通り。 $c=6$ のとき $(a+b)^2 < 24 \Rightarrow a+b=2, 3$ または $4 \Rightarrow$ 上の6通りよって全部で $1+3+3+6+6 = 19$ 通り

$$\text{ゆえに求める確率は } \frac{19}{6^3} = \frac{19}{216}$$

得点

数 学

氏名

受験
番号

- 2
- a, b, c
- を実数の定数とする。
- x
- についての整式
- $A(x)$
- と
- $B(x)$
- を

$$A(x) = x^3 - 3ax^2 + 3bx + c, \quad B(x) = x^2 - 2ax + b$$

とおく。3次方程式 $A(x) = 0$ は $x = -1$ を解にもつとし、 $A(x)$ を $x+1$ で割った商を $Q(x)$ とする。以下の問に答えよ。

- (1) $Q(x)$ を求めよ。また、 c を a と b を用いて表せ。
 (2) 方程式 $Q(x) = 0$ が実数解をもつとき、方程式 $B(x) = 0$ も実数解をもつことを示せ。
 (3) 2つの方程式 $Q(x) = 0, B(x) = 0$ がともに $x = a+1$ を解にもつとき、定数 a の値を求めよ。

[解答欄]

$$(1) A(-1) = -1 - 3a - 3b + c = 0 \quad \text{よって } c = 3a + 3b + 1 \quad \text{--- ①}$$

$$x^2 - (3a+1)x + 3a+3b+1 = Q(x)$$

$$\begin{array}{r} x+1 \) \ x^3 - 3ax^2 + 3bx + c \\ \underline{x^3 + x^2} \end{array}$$

$$(-3a-1)x^2 + 3bx + c$$

$$\underline{(-3a-1)x^2 - (3a+1)x}$$

$$(3a+3b+1)x + c$$

$$\underline{(3a+3b+1)x + 3a+3b+1}$$

$$c - 3a - 3b - 1 \leftarrow \text{①よりゼロ}$$

$$(2) Q(x) = 0 \text{ が実数解をもつ} \Leftrightarrow (3a+1)^2 - 4(3a+3b+1) = 9a^2 - 6a - 12b - 3 \geq 0$$

$$\text{よすめち } 3a^2 - 2a - 4b - 1 \geq 0 \quad \text{--- ②}$$

$$B(x) = 0 \text{ が実数解をもつ} \Leftrightarrow a^2 - b \geq 0 \quad \text{--- ③}$$

$$\text{示すべきことは、②} \Rightarrow \text{③} \text{ なので、②より } b \leq \frac{1}{4}(3a^2 - 2a - 1)$$

このとき ③ の左辺は

$$a^2 - b \geq a^2 - \frac{1}{4}(3a^2 - 2a - 1) = \frac{1}{4}(a^2 + 2a + 1) = \frac{1}{4}(a+1)^2 \geq 0$$

よって ② を仮定すれば、③ が成立する

$$(3) Q(a+1) = 0 \text{ より } (a+1)^2 - (3a+1)(a+1) + 3a+3b+1 = -2a^2 + a + 3b + 1 = 0 \quad \text{--- ④}$$

$$B(a+1) = 0 \text{ より } (a+1)^2 - 2a(a+1) + b = -a^2 + b + 1 = 0 \quad \text{--- ⑤}$$

$$\text{⑤より } b = a^2 - 1, \text{ ④に代入し、}$$

$$-2a^2 + a + 3(a^2 - 1) + 1 = a^2 + a - 2 = (a+2)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = -2, 1.$$

得
点

数 学

氏名

受験
番号

3

数列 $\{a_n\}$ は次の条件によって定められている。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{3n} a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問に答えよ。

- (1) a_2, a_3, a_4 を求めよ。
 (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
 (3) 和 $\sum_{k=1}^n a_k$ を求めよ。

[解答欄]

$$(1) a_2 = \frac{2}{3} a_1 = \frac{4}{3}, \quad a_3 = \frac{3}{6} a_2 = \frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{4}{9} a_3 = \frac{8}{27}$$

$$(2) \frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{3} \frac{a_n}{n} \text{ から } b_n = \frac{a_n}{n} \text{ とおくと, } \{b_n\} \text{ は初項 } 2, \text{ 公比 } \frac{1}{3}$$

の等比数列となる。ゆえに $b_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, $a_n = n b_n = 2n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$(2) \text{ 別解 } a_n = \frac{1}{3} \frac{n}{n-1} a_{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{n(n-1)}{(n-1)(n-2)} a_{n-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \frac{n(n-1)(n-2)}{(n-1)(n-2)(n-3)} a_{n-3}$$

$$= \dots = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{n(n-1)(n-2) \dots 2}{(n-1)(n-2)(n-3) \dots 1} a_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot n \cdot 2$$

$$(3) S = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + 2n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \sum_{k=1}^n a_k$$

両辺に $\frac{1}{3}$ を掛ける

$$\frac{1}{3} S = 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + 2(n-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 2n \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

辺々引く

$$\frac{2}{3} S = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 2n \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= 2 \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - 2n \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = 3 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

$$\therefore S = \frac{9}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) - 3n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{9}{2} - \left(\frac{9}{2} + 3n\right) \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

得点

数 学

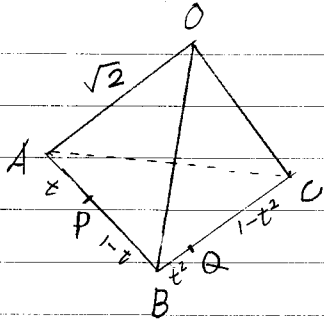
氏名

受験
番号

- 4 1辺の長さが $\sqrt{2}$ の正四面体OABCがある。辺ABを $t:(1-t)$ に内分する点をP, 辺BCを $t^2:(1-t^2)$ に内分する点をQとする。ただし, t は $0 < t < 1$ を満たす実数とする。以下の問に答えよ。

- (1) 内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ を t を用いて表せ。
 (2) 内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ の最大値と, そのときの実数 t の値を求めよ。

[解答欄]



$$(1) \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c} \text{ とおく. このとき}$$

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}, \overrightarrow{OQ} = (1-t^2)\vec{b} + t^2\vec{c},$$

OABCは1辺の長さ $\sqrt{2}$ の正四面体であるので,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{同様に } \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 1, \text{ また } |\vec{b}| = \sqrt{2} \quad \left. \vphantom{\vec{a} \cdot \vec{b}} \right\} (*)$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = ((1-t)\vec{a} + t\vec{b}) \cdot ((1-t^2)\vec{b} + t^2\vec{c})$$

$$= (1-t)(1-t^2)\vec{a} \cdot \vec{b} + t(1-t^2)|\vec{b}|^2 + (1-t)t^2\vec{a} \cdot \vec{c} + t^3\vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$(*) \text{より} = (1-t)(1-t^2) + 2t(1-t^2) + (1-t)t^2 + t^3$$

$$= t^3 - t^2 - t + 1 + 2t - 2t^3 + t^2 - t^3 + t^3 = -t^3 + t + 1$$

- (2) $f(t) = -t^3 + t + 1$ において $0 < t < 1$ の範囲での最大値を調べる.

$$f'(t) = -3t^2 + 1 = -3\left(t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

t	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	↗		↘

$t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ は最大値

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + 1$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{9} + 1 \text{ をとる.}$$

得点

数 学

氏名

受験
番号

問題 5 と問題 6 は選択問題ですので、どちらか1題を選択し、その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。
また選択しなかった問題の解答欄に「選択しない」と記入してください。

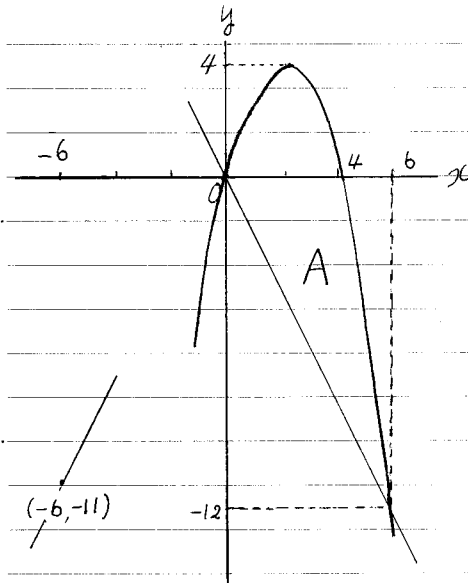
5

 xy 平面上において、連立不等式

$$y \leq -x^2 + 4x, \quad 2x + y \geq 0$$

の表す領域を A とする。以下の問に答えよ。(1) 領域 A の面積を求めよ。(2) 点 (x, y) が領域 A を動くとき、 $\frac{y+11}{x+6}$ の最大値と最小値を求めよ。

[解答欄]

(1) 放物線 $y = -x^2 + 4x$ と直線 $2x + y = 0$ との交点は、

$$-x^2 + 4x = -2x \text{ より}$$

$$x^2 - 6x = x(x-6) = 0.$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=0, & \text{よって } y=0 \\ x=6, & \text{よって } y=-12 \end{cases} \text{ かつ}$$

(0, 0), (6, -12) となる。

よって領域 A の面積は

$$\int_0^6 (-x^2 + 4x - (-2x)) dx = \int_0^6 (-x^2 + 6x) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^6 = -72 + 108 = 36.$$

$$\left(\text{積分公式 } \int_{\alpha}^{\beta} (x-\beta)(x-\alpha) dx = \frac{(\beta-\alpha)^3}{6} \text{ より } \int_0^6 -x(x-6) dx = \frac{6^3}{6} = 6^2 = 36 \text{ (注可)} \right)$$

$$(2) \frac{y+11}{x+6} = k \text{ とおく. よって } y = kx + 6k - 11. \text{ よって } (-6, -11) \text{ を通り,}$$

傾き k の直線を表す. この直線が放物線 $y = -x^2 + 4x$ に領域 A で接すれば、そのとき k が $\frac{y+11}{x+6}$ ($(x, y) \in A$) の最大値と予想される。接するのは、 $kx + 6k - 11 = -x^2 + 4x$, すなわち $x^2 + (k-4)x + 6k - 11 = 0$ の判別式 D がゼロのときであり

$$D = (k-4)^2 - 4(6k-11) = k^2 - 32k + 60 = (k-2)(k-30) = 0 \text{ より}$$

$$k = 2, 30.$$

 $k = 2$ のとき、 x 座標は $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0$ より $x = 1$, よって $y = 3$.接点は $(1, 3)$ で領域 A に属する. $k = 30$ のとき、 $x^2 + 26x + 169$

$$= (x+13)^2 = 0 \text{ より } x = -13, \quad y = -(13)^2 - 52 = -221. \text{ よって接点は } A \text{ の外.}$$

従って k の最大値は 2. 最小値は $(-6, -11)$ を通る直線が $(6, -12)$ を通るとき、

$$k = -1/2$$

得点

数 学

氏名

受験
番号

問題 5 と問題 6 は選択問題ですので、どちらか1題を選択し、その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。
また選択しなかった問題の解答欄に「選択しない」と記入してください。

6

$f(x) = x \log(1+x)$ とおく。ただし、 $\log x$ は x の自然対数を表す。以下の問に答えよ。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(0,0)$ における接線の方程式を求めよ。
- (2) 関数 $f(x)$ の増減を調べ、極値を求めよ。
- (3) 直線 $y = x$ と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

[解答欄]

$$(1) f'(x) = \log(1+x) + x \cdot \frac{1}{1+x} \quad \text{よって} \quad f'(0) = \log 1 = 0$$

$$(0,0) \text{ における接線は } y-0 = 0(x-0) \quad \text{よって} \quad y=0$$

(2) $f(x)$ の定義域は $-1 < x$.

$$f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{2+x}{(1+x)^2} > 0 \quad (-1 < x)$$

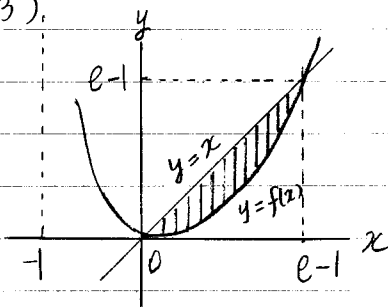
x	-1	0
$f''(x)$		+
$f'(x)$	-	0
$f(x)$	↘	↗

$f(x)$ は $-1 < x \leq 0$ で単調に減少し

$0 \leq x$ で単調に増加する。

$x=0$ で極小値 0 をとる。

(3)



$y=x$ と $y = x \log(1+x)$ の交点は

$$x(1 - \log(1+x)) = 0 \quad \text{よって} \quad x=0 \quad \text{および}$$

$$\log(1+x) = 1 \rightarrow x = e-1$$

$$\int_0^{e-1} (x - x \log(1+x)) dx = \int_0^{e-1} x(1 - \log(1+x)) dx$$

$$= \underbrace{\left[\frac{x^2}{2} (1 - \log(1+x)) \right]_0^{e-1}}_{=0} + \int_0^{e-1} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x} dx = \frac{1}{2} \int_1^e \frac{(t-1)^2}{t} dt$$

$$\begin{aligned} 1+x &= t \quad \text{とおく} \\ dx &= dt \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow e-1 \\ \hline t & 1 \rightarrow e \end{array}$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^e \left(t - 2 + \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{2} - 2t + \log t \right]_1^e$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} - 2e + 1 - \frac{1}{2} + 2 \right) = \frac{e^2}{4} - e + \frac{5}{4}$$

得点